APLIKASI ALGORITMA *SEQUENTIAL COLOR* UNTUK PEWARNAAN PETA WILAYAH KABUPATEN KUANTAN SINGINGI PROVINSI RIAU

TUGAS AKHIR

Diajukan Sebagai Salah Satu Syarat
Untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains
Pada Jurusan Matematika

Oleh :

ALHAMIS
10754000130

FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI SULTAN SYARIF KASIM RIAU
PEKANBARU
2012

APLIKASI ALGORITMA *SEQUENTIAL COLOR* UNTUK PEWARNAAN PETA WILAYAH KABUPATEN KUANTAN SINGINGI PROVINSI RIAU

ALHAMIS
NIM : 10754000130

Tanggal Sidang : 2 Februari 2012
Periode Wisuda : Juli 2012

Jurusan Matematika
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau
Jl. HR. Soebrantas No. 155 Pekanbaru

ABSTRAK

Salah satu aplikasi dalam teori graf adalah memberikan warna pada sebuah peta. Tugas akhir ini membahas tentang aplikasi algoritma *Sequential Color* untuk pewarnaan peta wilayah Kabupaten Kuantan Singingi Provinsi Riau. Algoritma *Sequential Color* adalah algoritma yang digunakan untuk mewarnai sebuah graf dengan k-warna, dengan k adalah bilangan *integer* positif. Metode yang digunakan adalah pewarnaan graf secara langsung dengan warna sesedikit mungkin. Solusi yang baik dalam mewarnai peta adalah menggunakan jumlah warna minimum (bilangan kromatik). Berdasarkan hasil penelitian diperoleh bahwa algoritma *Sequential Color* dapat digunakan untuk melakukan pewarnaan peta wilayah Kabupaten Kuantan Singingi dan jumlah warna minimum atau bilangan kromatik pada pewarnaan peta wilayah Kabupaten Kuantan Singingi adalah 4 warna.

Kata Kunci *: algoritma sequential color, bilangan kromatik.*

DAFTAR ISI

Halaman

DAFTAR TABEL

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Teori graf lahir pada tahun 1736 melalui tulisan Euler yang berisi tentang upaya pemecahan masalah jembatan *Konigsberg* yang sangat terkenal di Eropa. Siang (2006) menyebutkan graf adalah suatu diagram yang memuat informasi tertentu jika diinterpretasikan secara tepat. Tujuannya adalah sebagai visualisasi objek-objek agar lebih mudah dimengerti.

Teori graf merupakan salah satu penerapan dari cabang matematika yang berfungsi sebagai alat untuk menyelesaikan beberapa permasalahan dalam berbagai disiplin ilmu maupun permasalahan sosial dalam kehidupan sehari-hari, seperti bidang transportasi, jaringan komunikasi, ilmu kimia, kartografi dan lain sebagainya. Dengan menggunakan teori graf yang tepat, suatu permasalahan dapat dimodelkan sehingga lebih mudah untuk dianalisa dan diselesaikan. Permasalahan yang dapat diselesaikian dengan bantuan graf, antara lain masalah lintasan terpendek, persoalan pedagang keliling, persoalan tukang pos Cina, pewarnaan graf dan lain-lain.

Salah satu aplikasi dari teori graf yang menarik untuk dibahas adalah pewarnaan graf. Pewarnaan graf adalah pemberian warna, yang biasanya direpresentasikan sebagai bilangan terurut mulai dari 1 atau dapat juga direpresentasikan langsung dengan menggunakan warna merah, biru, hijau dan lain-lain pada objek tertentu pada graf. Objek tersebut dapat berupa simpul, sisi, dan wilayah. Persoalan pewarnaan graf, tidak hanya sekedar mewarnai simpul-simpul atau sisi dengan warna berbeda dari warna simpul atau sisi tetangganya saja, namun juga menggunakan jumlah warna minimum yang disebut dengan bilangan kromatik $(\chi(G))$ pada graf.

Pewarnaan graf merupakan salah satu konsep yang sangat banyak diaplikasikan. Misalnya, masalah penyusunan jadwal, alokasi memori komputer, penentuan frekuensi untuk radio, masalah pewarnaan peta, dan lain-lain. Tujuan dari pewarnaan terutama untuk memudahkan pembacaan, pengelompokan dan pengolahan data, misalnya untuk membaca peta diperlukan warna yang berbeda untuk menandakan suatu Kecamatan, Kabupaten atau Provinsi.

Pewarnaan wilayah dari sebuah graf dalam aplikasinya adalah pemberian warna-warna pada wilayah di peta, dengan batasan bahwa semua daerah yang bertetangga diberikan warna yang berbeda. Warna pada peta dapat dihemat dengan teori perwarnaan graf. Penghematan tersebut dapat dilakukan dengan menggunakan algoritma-algoritma yang ada. Saat ini banyak sekali algoritma-algoritma yang dapat diaplikasikan untuk pewarnaan graf. Salah satu algoritma yang dapat digunakan untuk pewarnaan graf adalah algoritma *Sequential Color*.

Algoritma *Sequential Color* adalah algoritma yang digunakan untuk mewarnai sebuah graf dengan k-warna, dimana k adalah bilangan *integer* positif. Metode yang digunakan adalah pewarnaan graf secara langsung dengan warna sesedikit mungkin (Lieyanda, 2010).

Berdasarkan uraian di atas, pada tulisan ini akan dibahas bagaimana melakukan pewarnaan peta wilayah dengan menggunakan algoritma *Sequential Color* yang diaplikasikan pada peta Kabupaten Kuantan Singingi yang terletak di wilayah Provinsi Riau. Judul tugas akhir ini yaitu "**Aplikasi Algoritma *Sequential Color* untuk Melakukan Pewarnaan Peta Wilayah Kabupaten Kuantan Singingi Provinsi Riau**".

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan uraian latar belakang di atas, maka dapat dirumuskan permasalahan sebagai berikut :

1. Bagaimana cara memberikan warna pada peta Kabupaten Kuantan Singingi menggunakan algoritma *Sequential Color*?
2. Berapakah warna minimum $\chi(G)$ yang dibutuhkan untuk mewarnai peta wilayah Kabupaten Kuantan Singingi?

1.3 Batasan Masalah

Batasan masalah yang menjadi acuan dalam pengerjaan tugas akhir ini adalah pewarnaan peta wilayah hanya dibatasi pada Kabupaten Kuantan Singingi dengan menggunakan algoritma *Sequential Color*.

1.4 Tujuan Penelitian

Tujuan dari penelitian ini adalah untuk mengaplikasikan algoritma *Sequential Color* pada pewarnaan peta wilayah Kabupaten Kuantan Singingi dan mendapatkan jumlah warna minimum yang dibutuhkan untuk mewarnai peta tersebut.

1.5 Manfaat Penelitian

Manfaat dari penelitian ini adalah :

1. Penulis

   Melalui penelitian ini dapat menambah penguasaan materi dalam melakukan penelitian serta mengaplikasikan langsung algoritma *Sequential Color* dalam kasus pewarnaan wilayah pada peta.
2. Lembaga Pendidikan

   Hasil pembahasan ini dapat digunakan sebagai tambahan bahan dalam pengembangan ilmu matematika khususnya dikalangan mahasiswa jurusan matematika.
3. Pengembangan Ilmu Pengetahuan

   Menambah khasanah dan mempertegas keilmuan matematika dalam peranannya terhadap perkembangan teknologi dan disiplin ilmu lain.

1.6 Sistematika Penulisan

Sistematika penulisan terdiri dari lima bab yaitu :

BAB I Pendahuluan

Bab ini berisikan latar belakang masalah, perumusan masalah, batasan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian dan sistematika penulisan.

BAB II Landasan Teori

Bab ini berisikan definisi teori graf, terminologi graf, pewarnaan graf dan algoritma *Sequential Color*.

BAB III Metodologi Penelitian

Bab ini berisikan metode yang digunakan dalam penyelesaian tugas akhir.

BAB IV Pembahasan dan Hasil

Bab ini berisiskan pemaparan cara-cara secara teoritis dalam mendapatkan hasil penilitian.

BAB V Penutup

Bab ini berisikan kesimpulan dan saran.

BAB II

LANDASAN TEORI

Bab ini menyajikan beberapa materi pendukung yang akan digunakan sebagai landasan berpikir dalam membahas tugas akhir dengan judul **"Aplikasi Algoritma *Sequential Color* untuk Melakukan Pewarnaan Peta Wilayah Kabupaten Kuantan Singingi Provinsi Riau".**

2.1 Graf

2.1.1 Definisi Graf

Definisi 2.1 (Zulkarnain, 2006) Sebuah graf G berisikan dua himpunan yaitu himpunan hingga tak kosong $V(G)$ yang elemen-elemennya disebut simpul-simpul dan himpunan (mungkin kosong) $E(G)$ yang elemen-elemennya disebut sisi, sehingga setiap sisi $E(G)$ adalah sebuah pasangan tak berurutan dari simpul-simpul di $V(G)$.

Definisi graf menyatakan bahwa V tidak boleh kosong, sedangkan E boleh kosong. Jadi, sebuah graf dimungkinkan tidak mempunyai sisi satu buah pun, tetapi simpulnya harus ada minimal satu.

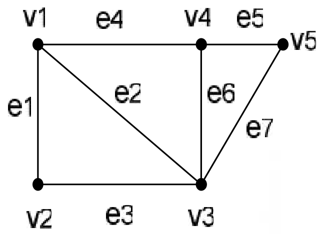
Simpul pada graf dapat dinomori dengan huruf ataupun dengan bilangan, ataupun keduanya. Sedangkan dalam penamaan sisi, biasanya dinyatakan dengan lambang $e_1, e_2, e_3, \dots, e_n$ yang menyatakan dua buah simpul yang dihubungkan oleh sisi e tersebut. Jika e adalah sisi yang menghubungkan v_i dan v_j, maka dapat ditulis $e = (v_i, v_j)$.

Graf G dapat ditulis dengan notasi $G = (V, E)$ (Lipschuts, 2002), dengan :

- V merupakan himpunan tak kosong dari simpul-simpul (*vertices*), misalkan $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$.
- E merupakan himpunan sisi–sisi (*edges*).

Gambar 2.1 di bawah ini merupakan contoh dari sebuah graf.

Contoh 2.1 :



Gambar 2.1 Graf *G*

Keterangan dari Gambar 2.1 di atas yaitu graf $G = (V, E)$ terdiri dari:

$V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$

$E = \{e_{1,}e_{2,}e_{3,}e_{4,}e_{5,}e_{6,}e_7\}$

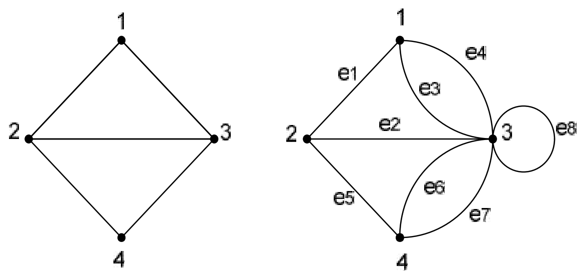
Sisi $e_1 = (v_1, v_2)$, sisi $e_2 = (v_1, v_3)$, sisi $e_3 = (v_2, v_3)$, sisi $e_4 = (v_1, v_4)$, sisi $e_5 = (v_4, v_5)$, sisi $e_6 = (v_3, v_4)$ dan sisi $e_7 = (v_3, v_5)$.

2.1.2 Graf Sederhana dan Graf Tak Sederhana

Definisi 2.2 (Zulkarnain, 2006) Graf sederhana adalah graf yang tidak memiliki gelang dan tidak memiliki sisi rangkap. Sebaliknya graf yang mengandung sisi rangkap atau gelang disebut graf tak-sederhana.

Berikut ini adalah contoh graf sederhana dan graf tak-sederhana.

Contoh 2.2 :



(a) (b)

Gambar 2.2 (a) Graf Sederhana (b) Graf Tak-Sederhana

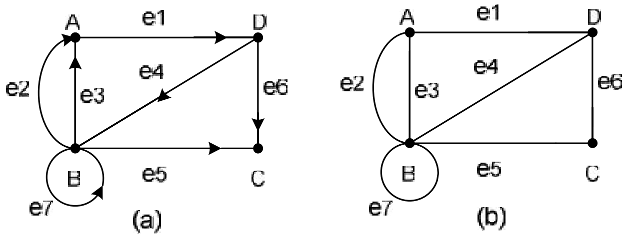
2.1.3 Graf Berarah (*Digraph*) dan Graf Tak-Berarah (*Undirected Graph*)

Menurut Lipschuts (2002), graf berarah adalah graf yang sisi-sisinya bersifat satu arah, dan setiap sisi $e = (u, v)$ direpresentasikan oleh suatu tanda panah dari simpul awal u ke simpul terminal v. Misalkan $e = (u, v)$ suatu sisi berarah dalam suatu *digraph* G, maka:

a. e dimulai di u dan berakhir di v.
b. u adalah simpul awal dari e, dan v adalah tujuan atau simpul terminal dari e.
c. v adalah *successor* (penerus) dari u.
d. u bersebelahan dengan v, dan v bersebelahan dengan u.

Berikut ini adalah contoh graf berarah dan graf tak-berarah.

Contoh 2.3 :



Gambar 2.3 (a) Graf Berarah (b) Graf Tak Berarah

Graf pada Gambar 2.3 (a) di atas adalah graf berarah karena setiap sisinya mempunyai orientasi arah. Sisi e_2 dan e_3 disebut sejajar (*paralel*) karena keduanya dimulai di B dan berakhir di A dan sisi e_7 merupakan suatu gelang (*loop*) karena dimulai di B dan berakhir di B. Sedangkan graf pada Gambar (b) adalah graf tak berarah, karena sisi-sisi dari graf tersebut tidak memiliki arah.

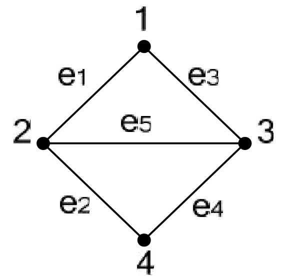
2.1.4 Terminologi Graf

1. Bertetangga (*Adjacent*) dan bersisian (*incident*)

Dua buah simpul v dan w dikatakan bertetangga apabila keduanya terhubung langsung dengan sebuah sisi $e = (v, w)$, dan sisi $e = (v, w)$ dikatakan bersisian atau terkait langsung dengan simpul v dan w (Wilson, 1995).

Gambar 2.4 di bawah ini adalah contoh graf yang bertetangga dan bersisian.

Contoh 2.4 :



Gambar 2.4 Graf *G*

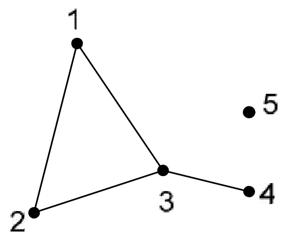
Berdasarkan graf *G* pada Gambar 2.4 di atas, simpul 1 bertetangga dengan simpul 2 dan 3, tetapi simpul 1 tidak bertetangga dengan simpul 4. Sisi (2,3) atau e_5 bersisian dengan simpul 2 dan simpul 3, sisi (2,4) atau e_2 bersisian dengan simpul 2 dan simpul 4, tetapi sisi (1,2) atau e_1 tidak bersisian dengan simpul 4.

2. Simpul Terpencil (*Isolated Vertex*)

Simpul terpencil adalah simpul yang tidak mempunyai sisi yang bersisian dengannya, atau dapat juga dinyatakan bahwa simpul terpencil adalah simpul yang satupun tidak bertetangga dengan simpul-simpul lainnya (Siang, 2006).

Gambar 2.5 berikut ini adalah contoh simpul terpencil.

Contoh 2.5 :



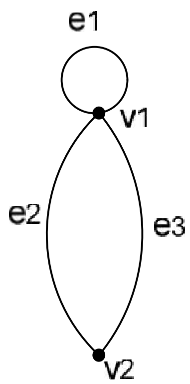
Gambar 2.5 Simpul Terpencil

Berdasarkan Gambar 2.5, simpul 5 adalah simpul terpencil karena tidak mempunyai sisi yang bersisian dengannya, atau tidak ada satupun simpul yang bertetangga dengan simpul 5.

3. Derajat (*Degree*)

Definisi 2.3 (Siang, 2006) Misalkan *v* adalah simpul dalam suatu graf *G*. Derajat simpul *v* (simbol $d(v)$) adalah jumlah garis (sisi) yang berhubungan dengan simpul *v* dan sisi gelang (*loop*) dihitung dua kali. Derajat total *G* adalah jumlah derajat semua simpul dalam *G*.

Contoh 2.6 : Perhatikan gambar graf berikut ini:



Gambar 2.6 Graf dengan Derajat Simpul

Berdasarkan Gambar 2.6 di atas, diperoleh bahwa derajat untuk masing-masing simpul adalah sebagai berikut:

$d(v_1) = 4$, karena garis yang berhubungan dengan v_1 adalah e_2, e_3 dan *loop* e_1 yang dihitung dua kali.

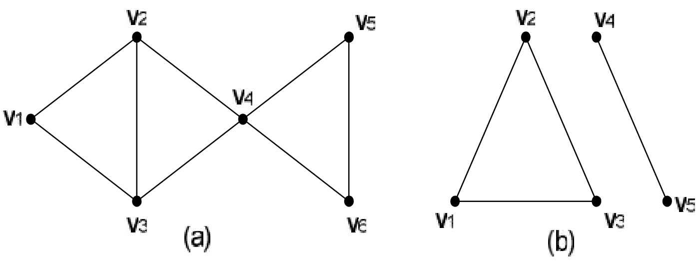
$d(v_2) = 2$, karena garis yang berhubungan dengan v_2 adalah e_2 dan e_3.

4. Graf terhubung (*Connected Graph*)

Misalkan G adalah suatu graf, maka setiap dua simpul *v* dan *w* dalam G dikatakan terhubung jika dan hanya jika ada lintasan dari simpul *v* ke *w* atau *w* ke *v*. Graf G dikatakan tidak terhubung jika dan hanya jika ada dua simpul dalam G yang tidak terhubung. (Siang, 2006).

Gambar berikut ini adalah contoh graf terhubung dan graf tak terhubung.

Contoh 2.7 :



Gambar 2.7 (a) Graf Terhubung (b) Graf Tidak Terhubung

Berdasarkan Gambar 2.7 di atas, Gambar 2.7 (a) adalah graf terubung karena setiap dua simpul di graf tersebut mempunyai lintasan. Sedangkan Gambar 2.7 (b) adalah graf tidak terhubung, karena tidak ada lintasan dari v_2 ke v_4.

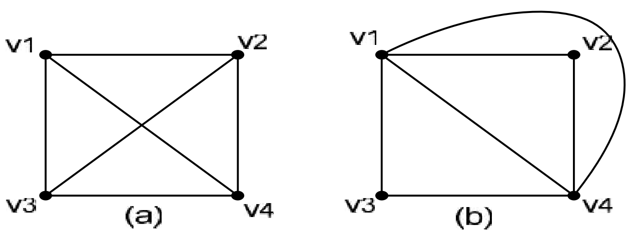
2.1.5 Graf Planar dan Graf Bidang

Definisi 2.4 (Zulkarnain, 2006) Sebuah graf disebut graf planar jika graf tersebut dapat digambar pada bidang datar sedemikian sehingga sisi-sisinya hanya beririsan (berpotongan) simpul-simpul akhirnya.

Definisi 2.5 (**Zulkarnain, 2006)** Graf bidang adalah graf planar G yang digambarkan pada bidang datar sedemikian hingga tidak ada sisi-sisinya yang saling beririsan (berpotongan) kecuali pada simpul-simpul akhir sisi-sisi tersebut.

Berikut ini adalah gambar dari graf planar dan graf bidang.

Contoh 2.8 :



Gambar 2.8 (a) Graf Planar (b) Graf Bidang

Berdasarkan Gambar 2.8 di atas, dapat dilihat bahwa graf pada Gambar (a) yang awalnya terdapat sisi yang saling berpotongan yaitu $e = (v_1, v_4)$ saling berpotongan dengan $e = (v_2, v_3)$ dapat digambarkan kembali seperti Gambar (b), sehingga tidak ada sisi yang berpotongan.

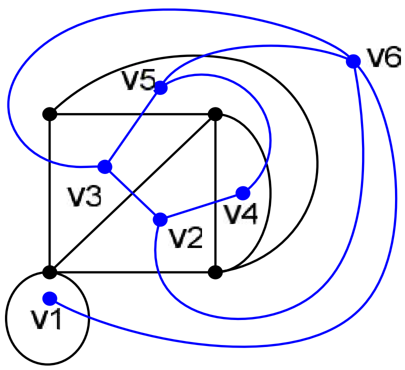
2.1.6 Graf Dual

Suatu permasalahan pewarnaan wilayah pada graf planar, bisa dibawa kepermasalahan pewarnaan simpul dengan membangun sebuah graf dual dari graf planar tersebut. Graf dual (yang dimisalkan dengan G^*) dibuat dari graf bidang G dengan cara:

1. Setiap wilayah (*region*) atau muka (*face*) f di G, buatlah sebuah simpul v^* yang merupakan simpul untuk G^*.
2. Untuk setiap sisi e di G, tariklah sisi e^* (yang menjadi sisi untuk G^*) yang memotong sisi e tersebut. Sisi e^* menghubungkan dua simpul v_1^* dan v_2^* yang berada dalam muka f_1 dan f_2 yang dipisahkan e di G, untuk sisi e yang salah satu simpulnya merupakan simpul berderajat 1 (jadi, sisi e seluruhnya terdapat di dalam sebuah muka), maka sisi e^* adalah berupa sisi gelang.

Gambar berikut ini adalah contoh pembentukkan graf dual.

Contoh 2.9 :



Gambar 2.9 Pembentukan Graf Dual *G dari Graf *G***

Berdasarkan Gambar 2.9 di atas, garis yang bewarna biru adalah sisi-sisi graf G^* yang merupakan dual dari graf G.

Konsep graf dual selanjutnya dimanfaatkan salah satunya untuk aplikasi penting dalam merepresentasikan peta. Tiap wilayah pada peta dinyatakan sebagai simpul, sedangkan sisi menyatakan bahwa dua wilayah berbatasan langsung.

2.2 Pewarnaan Graf

Pewarnaan graf adalah pemberian warna, yang biasanya direpresentasikan sebagai bilangan terurut mulai dari 1 atau dapat juga direpresentasikan langsung dengan menggunakan warna merah, biru, hijau dan lain-lain pada objek tertentu pada graf. Objek tersebut dapat berupa simpul, sisi, wilayah ataupun kombinasi ketiganya.

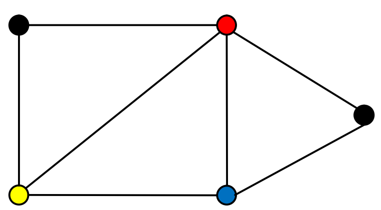
Persoalan pewarnaan graf dibagi ke dalam tiga macam yaitu :

1. Pewarnaan simpul (*vertex coloring*)

Pewarnaan simpul pada graf adalah memberi warna pada simpul-simpul suatu graf sedemikian sehingga tidak ada dua simpul bertetangga yang memiliki warna yang sama (As'ad, 2008). Sebuah pewarnaan yang menggunakan beberapa n-buah warna biasanya disebut dengan *n-coloring*. Ukuran terkecil banyaknya warna yang dapat diberikan kepada sebuah graf G dinamakan dengan bilangan kromatik yang dilambangkan dengan $\chi(G)$.

Gambar 2.10 berikut ini adalah contoh dari pewarnaan simpul. Perhatikan bahwa setiap simpul yang bertetangga diberikan warna yang berbeda.

Contoh 2.10 :



Gambar 2.10 Pewarnaan Simpul

Berdasarkan Gambar 2.10 di atas, graf tersebut mempunyai bilangan kromatik 4

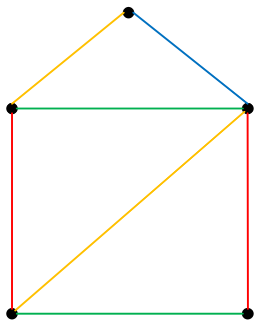
($\chi(G) = 4$), karena ukuran terkecil banyaknya warna yang dapat diberikan pada graf tersebut adalah 4 warna, yaitu: merah, kuning, biru dan hitam.

2. Pewarnaan sisi (*edge coloring*)

Pewarnaan sisi pada graf adalah memberi warna pada garis sedemikian rupa sehingga setiap garis yang bertumpuan pada simpul yang sama diberi warna yang berbeda. Pewarnaan sisi dengan warna-warna (sebut saja dengan variabel k) dinamakan sebagai pewarnaan sisi k dan ekuivalen dengan persoalan membagi sisi dengan warna-warna tertentu pada himpunan sisi dengan warna tertentu. Angka terkecil dari warna-warna yang dibutuhkan untuk pewarnaan sisi graf G disebut sebagai indeks kromatik atau angka kromatik sisi yang dilambangkan dengan $\chi'(G)$ (As'ad, 2008).

Gambar 2.11 berikut ini adalah contoh dari pewarnaan sisi. Setiap sisi yang bertetangga diberikan warna yang berbeda.

Contoh 2.11 :



Gambar 2.11 Pewarnaan Sisi

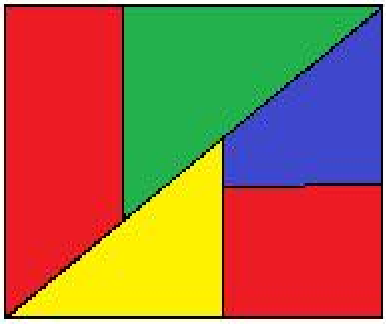
Berdasarkan Gambar 2.11 di atas, graf tersebut mempunyai bilangan kromatik 4, karena ukuran terkecil banyaknya warna yang dapat diberikan pada sisi graf tersebut adalah 4 warna yaitu merah, kuning, biru dan hijau.

3. Pewarnaan wilayah (*region coloring*)

Pewarnaan wilayah adalah pemberian warna pada setiap wilayah pada graf sehingga tidak ada wilayah bersebelahan yang memiliki warna yang sama. Misalnya adalah masalah pewarnaan peta. Tiap wilayah pada peta dinyatakan sebagai simpul graf. Sedangkan sisi menyatakan bahwa terdapat dua wilayah yang berbatasan langsung (disebut juga bertetangga). Oleh karena itu, graf yang terbentuk merupakan graf planar (As'ad, 2008).

Gambar 2.12 berikut ini adalah contoh dari pewarnaan wilayah. Setiap wilayah yang bertetangga diberikan warna yang berbeda.

Contoh 2.12 :



Gambar 2.12 Pewarnaan Wilayah

2.3 Pewarnaan Peta

Beberapa prinsip yang harus diperhatikan dalam mewarnai peta (Wibisono, 2004) yaitu:

1. Banyaknya warna yang harus digunakan harus seminimum mungkin.
2. Mewarnai wilayah pada peta berarti mewarnai simpul pada graf.
3. Dua buah simpul yang terhubung oleh satu atau lebih sisi tidak boleh diberi warna yang sama.
4. Dalam mewarnai peta pakailah sebuah warna secara optimum, artinya warna yang baru, akan digunakan apabila warna pertama tidak dapat digunakan lagi.

2.4 Algoritma *Sequential Color*

Algoritma *Sequential Color* adalah sebuah algoritma untuk mewarnai sebuah graf dengan k-warna, di mana k adalah bilangan *integer* positif. Metode yang digunakan algoritma ini adalah dengan pewarnaan langsung sebuah graf dengan warna yang sesedikit mungkin (Liyanda, 2010). Berikut ini merupakan langkah-langkah dari algoritma *Sequential Color* :

1. $G = (V, E)$ adalah graf dengan jumlah simpul v buah. Beri nama simpul graf tersebut dengan $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_v$. Misalkan warna-warna yang mungkin mewarnai simpul graf adalah : $1,2,3, \ldots, v$.
2. Buat $L_i = < 1,2,3, \ldots, v >$, dengan L_i adalah kumpulan warna yang mungkin menjadi warna dari simpul x_i, dimulai dari $i = 1$ hingga v.
3. Lakukan pewarnaan secara berurutan berdasarkan urutan dari simpul x_i, dimulai dari $i = 1$ hingga v, dengan cara sebagai berikut:

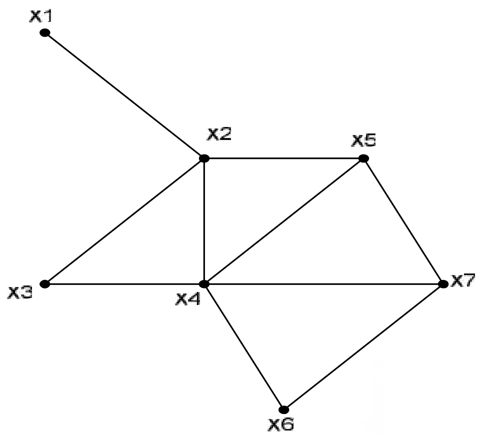
   3.1. Warnai simpul x_i dengan C_i (C_i adalah warna pertama pada list L_i).

   3.2. Untuk $j = i$ hingga v, lakukan:

   - jika $(x_i, x_j) \in E(G)$ maka $L_j = L_j - C_i$, artinya adalah jika C_i anggota L_j, buang C_i dari L_j, sebab x_j tidak boleh diwarnai dengan warna C_i, karena C_i telah menjadi warna x_i yang bertetangga dengan x_j. L_j adalah kumpulan warna yang mungkin bisa menjadi warna dari x_j.
4. Tiap simpul telah diberi warna dan jumlah warna yang digunakan dihitung.

Berikut ini adalah salah satu contoh dari cara penyelesaian masalah pewarnaan simpul graf dengan menggunakan algoritma *Sequential Color*.

Contoh 2.13 :



Gambar 2.13 Graf G

Graf pada Gambar 2.13 akan diwarnai dengan menggunakan algoritma *Sequential Color* dengan langkah-langkah sebagai berikut:

Langkah 1 : Menentukan simpul dan sisi pada graf serta memisalkan warna-warna yang mungkin mewarnai simpul-simpul graf dengan 1,2,3, $..., v$.

Graf pada Gambar 2.13 di atas mempunyai simpul dan sisi sebagai berikut:

$$G = (E, V)$$
$$V = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7\}$$
$$E = \{(x_1, x_2), (x_2, x_3), (x_2, x_4), (x_2, x_5), (x_3, x_4), (x_4, x_5), (x_4, x_6), (x_4, x_7)$$
$$(x_5, x_7), (x_6, x_7)\}.$$

Kemudian misalkan warna-warna yang mungkin mewarnai simpul graf adalah: 1,2,3,4,5,6,7.

Langkah 2 dan 3: Menentukan kumpulan warna yang mungkin menjadi warna dari simpul x_i dan kemudian melakukan pewarnaan secara berurutan berdasarkan urutan dari simpul x_i.

Langkah 2 dan 3 dapat dilihat pada Tabel 2.1 di bawah ini :

Tabel 4.1 Langkah-Langkah Pewarnaan Graf

Langkah	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
2	1	<1>			
2	2	<1,2>			
2	3	<1,2,3>			
2	4	<1,2,3,4>			
2	5	<1,2,3,4,5>			
2	6	<1,2,3,4,5,6>			
2	7	<1,2,3,4,5,6,7>			
3.1	1		1		
3.2	1			2	<2>
3.1	2		2		
3.2	2			3	<1,3>
				4	<1,3,4>
				5	<1,3,4,5>

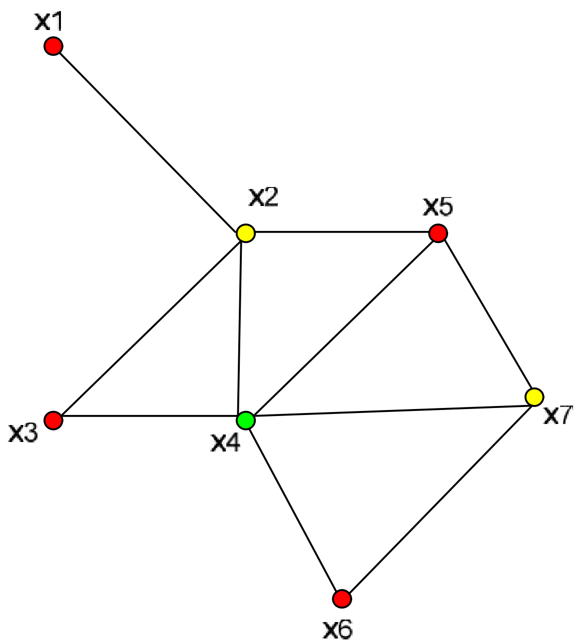
3.1	3		1		
3.2	3			4	<2,3,4>
3.1	4		3		
3.2	4			5	<1,2,4,5>
				6	<1,2,4,5,6>
				7	<1,2,4,5.6,7>
3.1	5		1		
3.2	5			7	<2,3,4,5,6,7>
3.1	6		1		
3.2	6			7	<2,3,4,5,6,7>
3.1	7		2		

Langkah 4 : Menghitung jumlah warna.

Berdasarkan kolom C_i pada Tabel 4.1 di atas, jumlah warna yang diperoleh dari hasil pewarnaan dengan menggunakan algoritma *Sequential Color* adalah tiga warna sebagai berikut :

1. Simpul x_1 diwarnai oleh warna 1
2. Simpul x_2 diwarnai oleh warna 2
3. Simpul x_3 diwarnai oleh warna 1
4. Simpul x_4 diwarnai oleh warna 3
5. Simpul x_5 diwarnai oleh warna 1
6. Simpul x_6 diwarnai oleh warna 1
7. Simpul x_7 diwarnai oleh warna 2.

Graf pada Gambar 2.13 di atas memiliki bilangan kromatik 3 ($\chi(G) = 3$) karena hanya membutuhkan minimal tiga buah warna dalam proses pewarnaannya. Jika dimisalkan warna 1 adalah warna merah, warna 2 adalah warna kuning, warna 3 adalah warna hijau. Adapun graf yang telah diwarnai adalah berikut:



Gambar 2.14 Graf dari Gambar 2.13 yang Telah Diberi Warna

Berdasarkan Gambar 2.14, dapat dilihat bahwa setiap simpul memiliki warna yang berbeda, sehingga hasil dari proses pewarnaan graf pada Gambar 2.13 dengan menggunakan algoritma *Sequential Color* telah sesuai dengan konsep pewarnaan graf, yaitu setiap simpul yang bertetangga tidak boleh diwarnai dengan warna yang sama dan tujuan pewarnaan dengan menggunakan algoritma *Sequential Color* tercapai, yaitu menginginkan warna yang sesedikit mungkin dalam proses pewarnaannya, karena dari 7 warna berbeda yang diberikan pada awal proses pewarnaan hanya dibutuhkan 3 warna pada akhir proses pewarnaannya.

BAB III

METODOLOGI PENELITIAN

Metode yang digunakan dalam penelitian dan penulisan tugas akhir ini adalah studi pustaka dengan cara mempelajari literatur-literatur yang berhubungan dengan graf dan pewarnaannya serta algoritma *Sequential Color*.

Langkah-langkah yang akan digunakan dalam penyelesaian tugas akhir ini sebagai berikut :

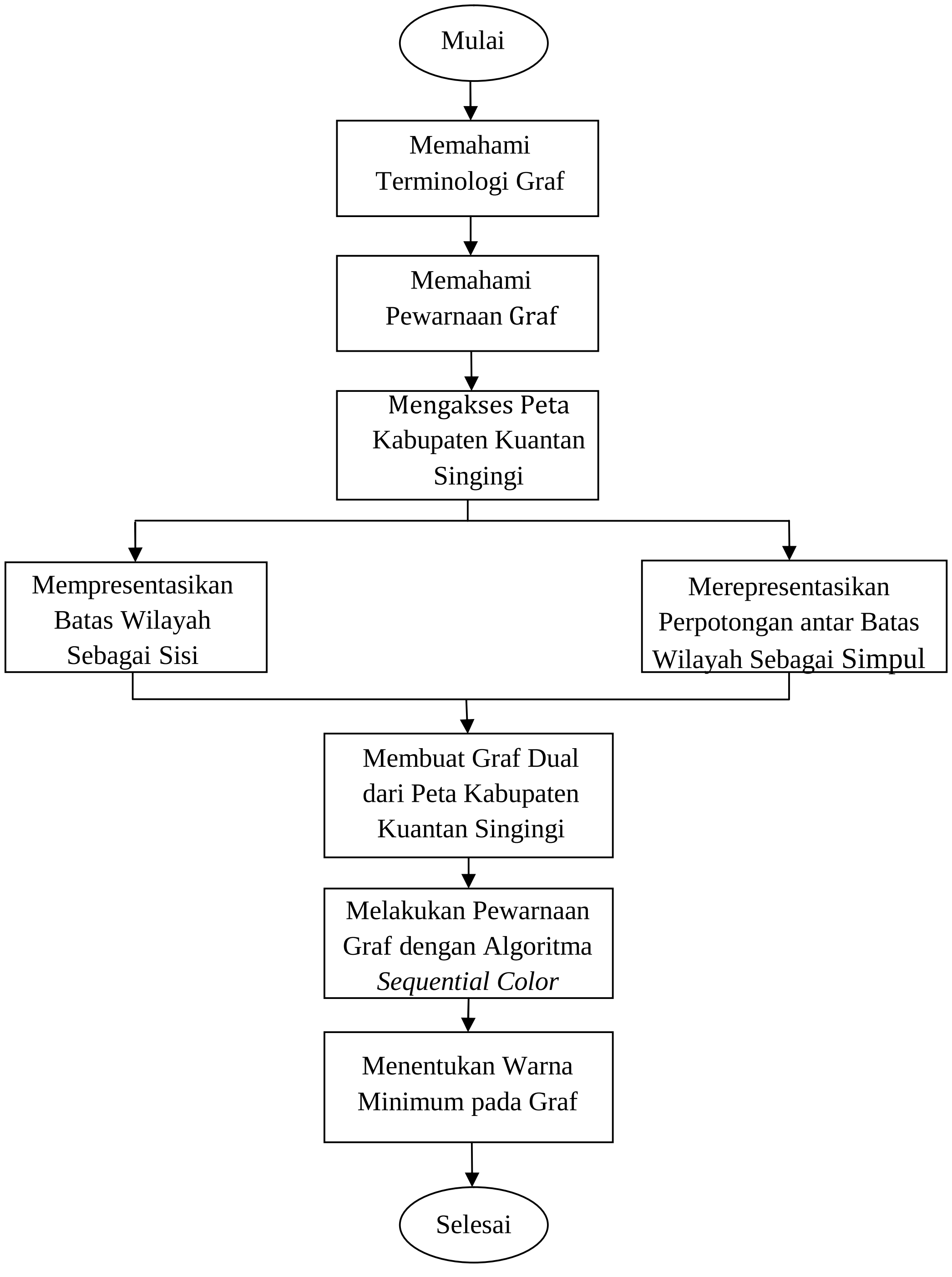
1. Memahami terminologi graf.
2. Memahami pewarnaan graf.
3. Mengakses dan memahami peta Kabupaten Kuantan Singingi Provinsi Riau dengan batas-batas wilayah setiap Kecamatannya.
4. Merepresentasikan batas-batas wilayah Kecamatan sebagai sisi dan perpotongan antar batas wilayah sebagai simpul.
5. Membuat graf dual dari peta Kabupaten Kuantan Singingi.
6. Mengaplikasikan algoritma *Sequential Color* untuk melakukan pewarnaan wilayah pada peta Kabupaten Kuantan Singingi, dengan langkah-langkah sebagai berikut :
   a. $G = (V, E)$ adalah graf dengan jumlah simpul v buah. Memberikan nama simpul graf tersebut dengan $x_1, x_2, x_{3,} \dots, x_v$. Misalkan warna-warna yang mungkin mewarnai simpul graf adalah : $1,2,3, \dots, v$
   b. Buat $L_i = < 1,2,3, \dots, v >$, dengan L_i adalah kumpulan warna yang mungkin menjadi warna dari simpul x_i, dimulai dari $i = 1$ hingga v,
   c. Lakukan pewarnaan secara berurutan berdasarkan urutan dari simpul x_i, dimulai dari $i = 1$ hingga v, dengan cara sebagai berikut:
      - Warnai simpul x_i dengan C_i (C_i adalah warna pertama pada list L_i).
      - Untuk $j = i$ hingga v, lakukan:
         - jika $(x_i, x_j) \in E(G)$ maka $L_j = L_j - C_i$, artinya adalah jika C_i anggota L_j, buang C_i dari L_j, sebab x_j tidak boleh diwarnai dengan

warna C_i, karena C_i telah menjadi warna x_i yang bertetangga dengan x_j. L_j adalah kumpulan warna yang mungkin bisa menjadi warna dari x_j.

d. Tiap simpul telah diberi warna dan jumlah warna yang digunakan dihitung.

7. Menentukan berapa warna minimum $\chi(G)$ yang digunakan untuk mewarnai peta Kabupaten Kuantan Singingi.

Langkah-langkah metodologi penelitian dalam *flowchart* berikut ini :



Gambar 3.1. *Flowchart* Metodologi Penelitian

BAB IV

PEMBAHASAN DAN HASIL

Bab ini akan membahas tentang bagaimana mengaplikasikan algoritma *Sequential Color* dalam mewarnai peta wilayah Kabupaten Kuantan Singingi Provinsi Riau serta menentukan jumlah warna minimum yang digunakan dalam kasus pewarnaan peta tersebut.

4.1 Wilayah Kabupaten Kuantan Singingi

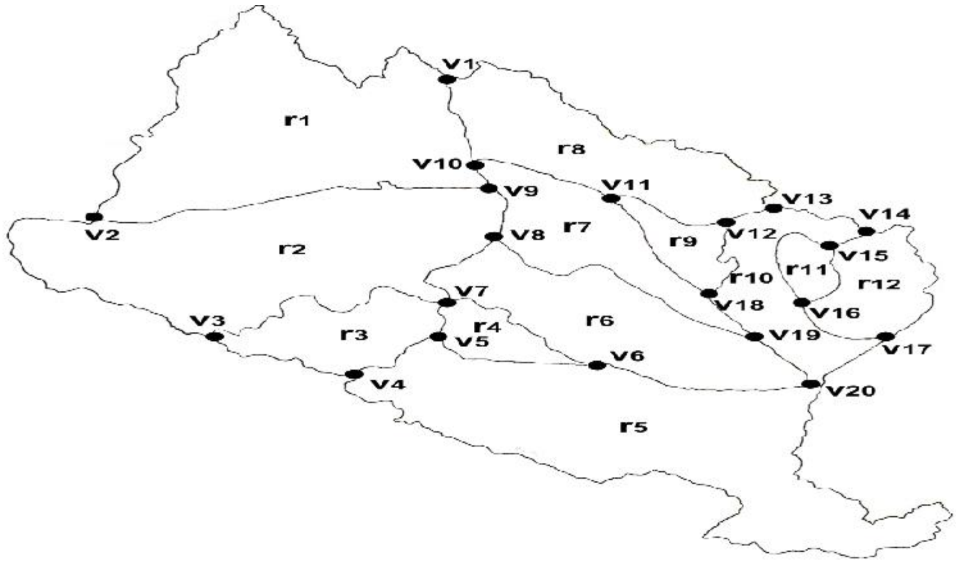
Berikut ini adalah gambaran peta wilayah Kabupaten Kuantan Singingi :

Gambar 4.1 Peta Wilayah Kabupaten Kuantan Singingi

4.2 Cara Merepresentasikan Peta Wilayah Kabupaten Kuantan Singingi ke dalam Suatu Graf

Wilayah Kabupaten Kuantan Singingi terdiri dari 12 wilayah Kecamatan dengan batas-batas wilayahnya. Adapun cara merepresentasikan peta yang terdiri dari beberapa wilayah menjadi suatu graf yaitu dengan merepresentasikan batas-batas wilayah sebagai sisi dan perpotongan antar batas wilayah sebagai simpul. Masing-masing wilayah Kecamatan di beri nama $r_1, r_2, r_3, \dots, r_{12}$.

Gambar 4.2 berikut ini adalah gambar yang merepresentasikan peta wilayah Kabupaten Kuantan Singingi ke dalam suatu graf :



Gambar 4.2 Graf yang Merepresentasikan Peta Kuantan Singingi

Keterangan dari Gambar 4.2, Kecamatan-Kecamatan yang berada pada Kabupaten Kuantan Singingi terdiri dari 12 Kecamatan sebagai berikut :

r_1 : Kecamatan Singingi Hilir

r_2 : Kecamatan Singingi

r_3 : Kecamatan Hulu Kuantan

r_4 : Kecamatan Gunung Toar

r_5 : Kecamatan Kuantan Mudik

r_6 : Kecamatan Kuantan Tengah

r_7 : Kecamatan Benai

r_8 : Kecamatan Logas Tanah Darat

r_9 : Kecamatan Pangean

r_{10} : Kecamatan Kuantan Hilir

r_{11} : Kecamatan Inuman

r_{12} : Kecamatan Cerenti

Graf yang terbentuk dari peta Kabupaten Kuantan Singingi merupakan suatu graf bidang karena tidak ada sisi-sisi yang saling beririsan (berpotongan), kecuali pada simpul-simpul akhir sisi-sisi tersebut.

Wilayah (*Region)* pada graf terdiri dari simpul dan sisi yang menghubungkannya, maka Gambar 4.2 di atas terdiri dari simpul dan sisi yang menghubungkannya yaitu :

$$G = (V, E)$$

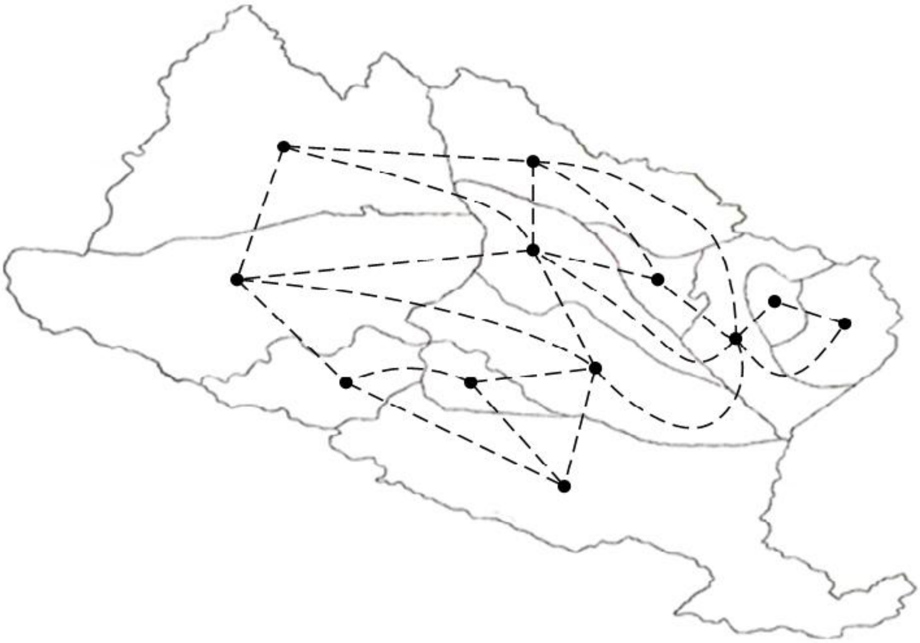
$$V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8, v_9, v_{10}, v_{11}, v_{12}, v_{13}, v_{14}, v_{15}, v_{16}, v_{17}, v_{19}, v_{20}\}$$

$$\begin{aligned} E = \{&(v_1, v_2), (v_1, v_{10}), (v_1, v_{13}), (v_2, v_3), (v_2, v_9), (v_3, v_4), (v_3, v_7), \\ &(v_4, v_5), (v_4, v_{20}), (v_5, v_6), (v_5, v_7), (v_6, v_7), (v_6, v_{20}), (v_7, v_8), \\ &(v_8, v_9), (v_8, v_{19}), (v_9, v_{10}), (v_{10}, v_{11}), (v_{11}, v_{12}), (v_{11}, v_{18}), \\ &(v_{12}, v_{13}), (v_{12}, v_{18}), (v_{13}, v_{14}), (v_{14}, v_{15}), (v_{14}, v_{17}), (v_{15}, v_{16}), \\ &(v_{16}, v_{15}), (v_{16}, v_{17}), (v_{17}, v_{20}), (v_{18}, v_{19}), (v_{19}, v_{20})\}. \end{aligned}$$

4.3 Graf Dual dari Peta Kabupaten Kuantan Singingi

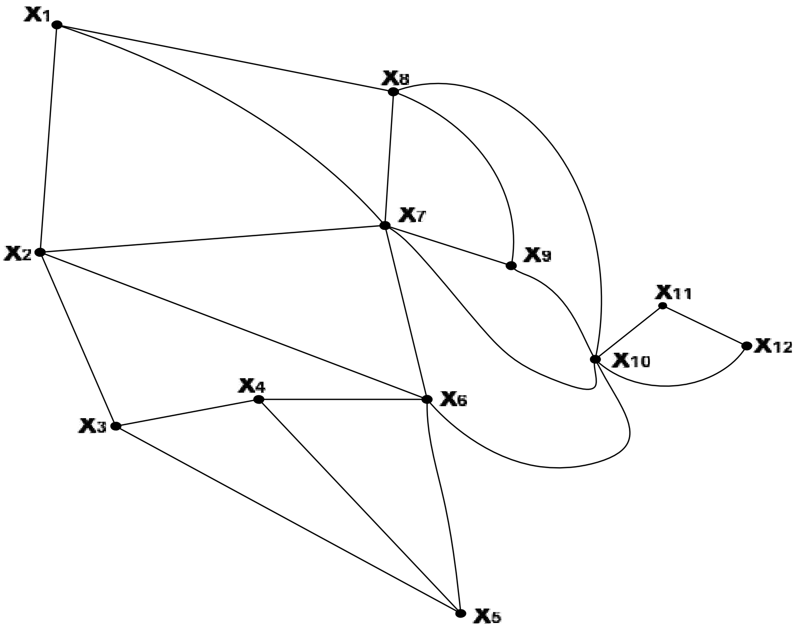
Cara membuat graf dual dari peta Kabupaten Kuantan Singingi adalah dengan merepresentasikan wilayah Kecamatan yang ada di Kabupaten Kuantan Singingi sebagai simpul dan selanjutnya simpul-simpul yang mewakili wilayah Kecamatan yang saling berbatasan atau bertetangga dihubungkan dengan sebuah sisi.

Cara membuat graf dual dari peta Kabupaten Kuantan Singingi dapat dilihat pada Gambar 4.3 berikut ini:



Gambar 4.3 Cara Membuat Graf Dual Peta Kuantan Singingi

Berdasarkan Gambar 4.3 di atas, garis putus-putus pada gambar tersebut merupakan graf dual dari peta Kabupaten Kuantan Singingi. Sehingga graf dual yang terbentuk dari peta Kabupaten Kuantan Singingi adalah seperti Gambar 4.4 berikut ini :



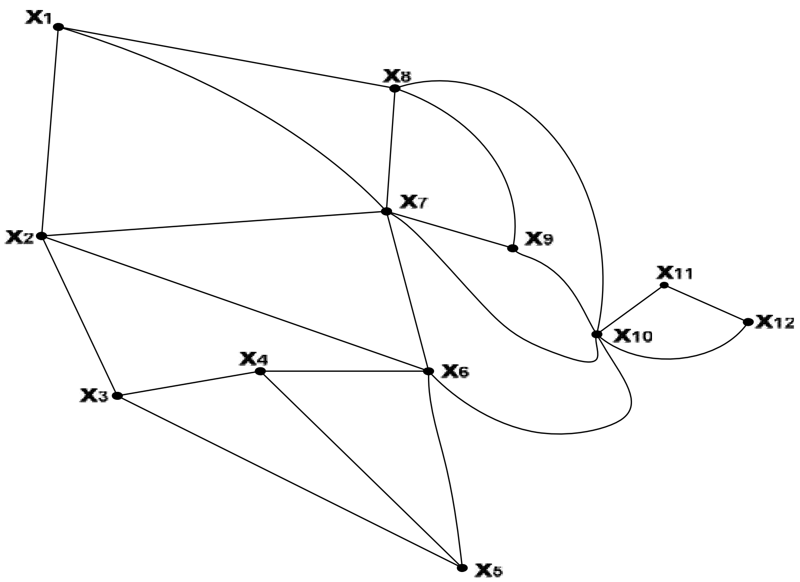
Gambar 4.4 Graf Dual Peta Kabupaten Kuantan Singingi

4.4 Pewarnaan Wilayah pada Peta Kabupaten Kuantan Singingi Menggunakan Algoritma *Sequential Color*

Pewarnaan pada peta Kabupaten Kuantan Singingi dilakukan dengan konsep pewarnaan wilayah (*region coloring*), dimana setiap wilayah yang bertetangga akan diwarnai dengan warna yang berbeda. Berikut ini akan dijelaskan bagaimana jalannya algoritma *Sequential Color* untuk pewarnaan peta Kabupaten Kuantan Singingi. Adapun langkah-langkah pewarnaan dengan menggunakan algoritma *Sequential Color* adalah sebagai berikut :

Langkah 1: Menentukan himpunan simpul dan sisi pada graf. Graf $G = (V, E)$ adalah graf yang terdiri dari himpunan simpul dan sisi. Jika simpul pada graf belum diberi nama, maka graf tersebut harus diberi nama terlebih dahulu, misalnya dengan nama simpul $x_1, x_2, x_{3,} \ldots, x_v$. Kemudian misalkan warna-warna yang mungkin mewarnai simpul graf adalah : $1,2,3, \ldots, v$.

Berdasarkan Gambar 4.5 di bawah ini, graf dual yang terbentuk dari graf yang merepresentasikan Kabupaten Kuantan Singingi adalah graf dengan jumlah simpul 12 buah. Simpul-simpul graf tersebut yaitu: $x_1, x_2, x_{3,} \ldots, x_{12}$. Misalkan warna-warna yang mungkin mewarnai simpul graf adalah : $1,2,3, \ldots ,12$.



Gambar 4.5 Graf Dual dari Peta Kabupaten Kuantan Singingi

$G = (E, V)$

$V = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9, x_{10}, x_{11}, x_{12}\}$

$E = \{(x_1, x_2), (x_1, x_7), (x_1, x_8), (x_2, x_3), (x_2, x_6), (x_2, x_7), (x_3, x_4), (x_3, x_6),$
$(x_4, x_5), (x_4, x_6), (x_5, x_6), (x_6, x_7), (x_6, x_{10}), (x_7, x_8), (x_7, x_9), (x_7, x_{10}),$
$(x_8, x_9), (x_8, x_{10}, (x_9, x_{10}), (x_{10}, x_{11}), (x_{11}, x_{12})\}.$

Langkah 2: Menentukan L_i, yaitu kumpulan warna yang mungkin menjadi warna dari simpul x_i. Semua simpul pada graf terlebih dahulu diberikan warna yang berbeda, sehingga L_i untuk simpul-simpul graf pada Gambar 4.5 di atas adalah:

L_1 untuk x_1 adalah <1>
L_2 untuk x_2 adalah <1,2>
L_3 untuk x_3 adalah <1,2,3>
L_4 untuk x_4 adalah <1,2,3,4>
L_5 untuk x_5 adalah <1,2,3,4,5>
L_6 untuk x_6 adalah <1,2,3,4,5,6>
L_7 untuk x_7 adalah <1,2,3,4,5,6,7>
L_8 untuk x_8 adalah <1,2,3,4,5,6,7,8>
L_9 untuk x_9 adalah <1,2,3,4,5,6,7,8,9>
L_{10} untuk x_{10} adalah <1,2,3,4,5,6,7,8,9,10>
L_{11} untuk x_{11} adalah <1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11>
L_{12} untuk x_{12} adalah <1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12>

Langkah 3: Melakukan pewarnaan secara berurutan berdasarkan dari urutan simpul x_i, dimulai dari $i = 1$ hingga v, dengan cara sebagai berikut:

- Langkah 3.1 : Warnai simpul x_i dengan C_i (C_i adalah warna pertama pada list L_i).
- Langkah 3.2 : Untuk $j = i$ hingga v, lakukan:
  - jika $(x_i, x_j) \in E(G)$ maka $L_j = L_j - C_i$, artinya adalah jika C_i anggota L_j, buang C_i dari L_j, sebab x_j tidak boleh diwarnai dengan warna

C_i, karena C_i telah menjadi warna x_i yang bertetangga dengan x_j. L_j adalah kumpulan warna yang mungkin bisa menjadi warna dari x_j.

Berdasarkan langkah 3, maka proses dari pewarnaan graf dengan menggunakan algoritma *Sequential Color* adalah sebagai berikut:

a. Simpul x_1

Untuk warna simpul x_1, ambil warna pertama pada list L_1 yaitu 1, berarti C_1 untuk simpul x_1 adalah 1. Kemudian perhatikan simpul-simpul yang bertetangga dengan simpul x_1, simpul yang bertetangga dengan simpul x_1 adalah simpul x_2, x_7, x_8 , berarti $j = 2,7,8$. Kemudian untuk L_2 atau warna yang mungkin bisa menjadi warna dari simpul x_2 adalah sebagai berikut :

- $L_j = L_j - C_i$

  $L_2 = L_2 - C_1$

  $= < 1,2 > - < 1 >$, artinya adalah jika $C_1 = 1$ anggota $L_2 =< 1,2 >$, buang $C_1 = 1$ dari $L_2 =< 1,2 >$, sebab x_2 tidak boleh diwarnai dengan warna $C_1 = 1$, karena $C_1 = 1$ telah menjadi warna x_1 yang bertetangga dengan x_2. Sehingga diperoleh:

  $L_2 =< 2 >$
- $L_j = L_j - C_i$

  $L_7 = L_7 - C_1$

  $= < 1,2,3,4,5,6,7 > - < 1 >$, artinya adalah jika $C_1 = 1$ anggota $L_7 =< 1,2,3,4,5,6,7 >$, buang $C_1 = 1$ dari $L_7 =< 1,2,3,4,5,6,7 >$, sebab x_7 tidak boleh diwarnai dengan warna $C_1 = 1$, karena $C_1 = 1$ telah menjadi warna x_1 yang bertetangga dengan x_7. Sehingga warna-warna yang mungkin bisa menjadi warna dari simpul x_7 adalah:

  $L_7 =< 2,3,4,5,6,7 >$
- $L_j = L_j - C_i$

  $L_8 = L_8 - C_1$

  $= < 1,2,3,4,5,6,7,8 > - < 1 >$, artinya adalah jika $C_1 = 1$ anggota $L_8 =< 1,2,3,4,5,6,7,8 >$, buang $C_1 = 1$ dari $L_8 =< 1,2,3,4,5,6,7,8 >$, sebab x_8

tidak boleh diwarnai dengan warna $C_1 = 1$, karena $C_1 = 1$ telah menjadi warna x_1 yang bertetangga dengan x_8. Sehingga warna-warna yang mungkin bisa menjadi warna dari simpul x_8 adalah:

$L_8 \ = < 2,3,4,5,6,7,8 >$

b. <u>Simpul x_2</u>

Untuk warna simpul x_2, perhatikan $L_2 =< 1,2 >$, karena warna pertama pada L_2 telah dipakai oleh simpul x_1, dan simpul x_1 merupakan simpul tetangga dari x_2 sebelumnya, maka ambil warna 2, berarti C_2 untuk simpul x_2 adalah 2. Kemudian perhatikan simpul-simpul yang bertetangga dengan simpul x_2, simpul yang bertetangga dengan simpul x_2 adalah simpul x_3, x_6, x_7, berarti $j = 3,6,7.$ Kemudian untuk L_3, L_6 dan L_7 atau kumpulan warna yang mungkin bisa menjadi warna dari simpul x_3, x_6 dan x_7 adalah sebagai berikut :

- $L_j \ = L_j - C_i$

  $L_3 = L_3 - L_2$

  $=< 1,2,3 > \ - < 2 >$, artinya adalah jika $C_2 = 2$ anggota $L_3 =< 1,2,3 >$, buang $C_2 = 2$ dari $L_3 =< 1,2,3 >$, sebab x_3 tidak boleh diwarnai dengan warna $C_2 = 2$ karena $C_2 = 2$ telah menjadi warna x_2 yang bertetangga dengan x_3. Sehingga diperoleh:

  $L_3 =< 1,3 >$

- $L_j \ = L_j - C_i$

  $L_6 = L_6 - C_2$

  $=< 1,2,3,4,5,6 > \ - < 2 >$, artinya adalah jika $C_2 = 2$ anggota $L_6 =< 1,2,3,4,5,6 >$, buang $C_2 = 2$ dari $L_6 =< 1,2,3,4,5,6 >$, sebab x_6 tidak boleh diwarnai dengan warna $C_2 = 2$ karena $C_2 = 2$ telah menjadi warna x_2 yang bertetangga dengan x_6. Sehingga diperoleh:

  $L_6 =< 1,3,4,5,6 >$

- $L_j \ = L_j - C_i$

  $L_7 = L_7 - C_2$

$= < 1,2,3,4,5,6,7 > - < 2 >$, artinya adalah jika $C_2 = 2$ anggota $L_7 =< 1,2,3,4,5,6,7 >$, buang $C_2 = 2$ dari $L_7 =< 1,2,3,4,5,6,7 >$, sebab x_7 tidak boleh diwarnai dengan warna $C_2 = 2$ karena $C_2 = 2$ telah menjadi warna x_2 yang bertetangga dengan x_7. Sehingga diperoleh:

$L_7 =< 1,3,4,5,6,7 >$

c. **Simpul x_3**

Untuk warna simpul x_3, perhatikan $L_3 =< 1,2,3 >$, karena warna pertama pada L_3 adalah warna 1, ambil warna 1, berarti C_3 untuk simpul x_3 adalah 1, kemudian perhatikan simpul-simpul yang bertetangga dengan simpul x_3, simpul yang bertetangga dengan simpul x_3 adalah simpul x_4 dan x_5 berarti $j = 4,5$, kemudian untuk L_4 dan L_5 atau warna yang mungkin bisa menjadi warna dari simpul x_4 dan x_5 adalah sebagai berikut :

- $L_j = L_j - C_i$

  $L_4 = L_4 - C_3$

  $= < 1,2,3,4 > - < 1 >$, artinya adalah jika $C_3 = 1$ anggota $L_4 =< 1,2,3,4 >$, buang $C_3 = 1$ dari $L_4 =< 1,2,3,4 >$, sebab x_4 tidak boleh diwarnai dengan warna $C_3 = 1$, karena $C_3 = 1$ telah menjadi warna x_3 yang bertetangga dengan x_4. Sehingga diperoleh:

  $L_4 =< 2,3,4 >$

- $L_j = L_j - C_i$

  $L_5 = L_5 - C_3$

  $= < 1,2,3,4,5 > - < 1 >$, artinya adalah jika $C_3 = 1$ anggota $L_5 =< 1,2,3,4,5 >$, buang $C_3 = 1$ dari $L_5 =< 1,2,3,4,5 >$, sebab x_5 tidak boleh diwarnai dengan warna $C_3 = 1$, karena $C_3 = 1$ telah menjadi warna x_3 yang bertetangga dengan x_5. Sehingga diperoleh:

  $L_5 =< 2,3,4,5 >$

d. Simpul x_4

Untuk warna simpul x_4, perhatikan $L_4 =< 1,2,3,4 >$, karena warna pertama pada L_4 telah dipakai oleh simpul x_3 sebagai simpul tetangga dari x_4 sebelumnya, maka yang menjadi warna pertama pada $L_4 =< 1,2,3,4 >$ adalah warna 2, ambil warna 2, berarti C_4 untuk simpul x_4 adalah 2, kemudian perhatikan simpul-simpul yang bertetangga dengan simpul x_4, simpul yang bertetangga dengan simpul x_4 adalah simpul x_5 dan x_6, berarti $j = 5,6$, kemudian untuk L_5 dan L_6 atau warna yang mungkin bisa menjadi warna dari simpul x_5 dan x_6 adalah sebagai berikut :

- $L_j = L_j - C_i$

  $L_5 = L_5 - C_4$

  $=< 1,2,3,4,5 > - < 2 >$, artinya adalah jika $C_4 = 2$ anggota $L_5 = 1,2,3,4,5 >$, buang $C_4 = 2$ dari $L_5 =< 1,2,3,4,5 >$, sebab x_5 tidak boleh diwarnai dengan warna $C_4 = 2$, karena $C_4 = 2$ telah menjadi warna x_4 yang bertetangga dengan x_5. Sehingga diperoleh:

  $L_5 =< 1,3,4,5 >$

- $L_j = L_j - C_i$

  $L_6 = L_6 - C_4$

  $=< 1,2,3,4,5,6 > - < 2 >$, artinya adalah jika $C_4 = 2$ anggota $L_6 = 1,2,3,4,5,6 >$, buang $C_4 = 2$ dari $L_6 =< 1,2,3,4,5,6 >$, sebab x_6 tidak boleh diwarnai dengan warna $C_4 = 2$, karena $C_4 = 2$ telah menjadi warna x_4 yang bertetangga dengan x_6. Sehingga diperoleh:

  $L_6 =< 1,3,4,5,6 >$

e. Simpul x_5

Untuk warna simpul x_5, perhatikan $L_5 =< 1,2,3,4,5 >$, karena warna pertama pada L_5 yaitu warna 1 dan warna 2 telah dipakai oleh simpul tetangga dari x_5 yaitu simpul x_3 dan x_4 sebelumnya, maka warna pertama pada list $L_5 =< 1,2,3,4,5 >$ adalah warna 3, berarti C_5 untuk simpul x_5 adalah 3. Kemudian perhatikan simpul-simpul yang bertetangga dengan simpul x_5, simpul yang bertetangga dengan simpul x_5 adalah simpul x_6, berarti $j = 6$, kemudian untuk L_6 atau warna yang mungkin bisa menjadi warna dari simpul x_6 adalah sebagai berikut :

- $L_j = L_j - C_i$

  $L_6 = L_6 - C_5$

  $= < 1,2,3,4,5 > - < 3 >$, artinya adalah jika $C_5 = 3$ anggota $L_6 =< 1,2,3,4,5,6 >$, buang $C_5 = 3$ dari $L_6 =< 1,2,3,4,5,6 >$, sebab x_6 tidak boleh diwarnai dengan warna $C_5 = 3$, karena $C_5 = 3$ telah menjadi warna x_5 yang bertetangga dengan x_6. Sehingga diperoleh:

  $L_6 = < 1,2,4,5,6 >$

f. Simpul x_6

Untuk warna simpul x_6 ambil warna 1, karena warna pertama pada $L_6 =< 1,2,3,4,5,6 >$ adalah warna 1, berarti C_6 untuk simpul x_6 adalah 1, kemudian perhatikan simpul-simpul yang bertetangga dengan simpul x_6, simpul yang bertetangga dengan simpul x_6 adalah simpul x_7, x_{10}, berarti $j = 7,10$, kemudian untuk L_7 dan L_{10} atau warna yang mungkin bisa menjadi warna dari simpul x_7 dan x_{10} adalah sebagai berikut :

- $L_j = L_j - C_i$

  $L_7 = L_7 - C_6$

  $= < 1,2,3,4,5,6,7 > - < 1 >$, artinya adalah jika $C_6 = 1$ anggota $L_7 = 1,2,3,4,5,6,7 >$, buang $C_6 = 1$ dari $L_7 =< 1,2,3,4,5,6,7 >$, sebab x_7 tidak boleh diwarnai dengan warna $C_6 = 1$, karena $C_6 = 1$ telah menjadi warna x_6 yang bertetangga dengan x_7. Sehingga diperoleh:

  $L_7 = < 2,3,4,5,6,7 >$.

- $L_j = L_j - C_i$

  $L_{10} = L_{10} - C_6$

  $= < 1,2,3,4,5,6,7,8,9,10 > - < 1 >$, artinya adalah jika $C_6 = 1$ anggota $L_{10} = 1,2,3,4,5,6,7,8,9,10 >$, buang $C_6 = 1$ dari $L_{10} =< 1,2,3,4,5,6,7 >$, sebab x_{10} tidak boleh diwarnai dengan warna $C_6 = 1$, karena $C_6 = 1$ telah menjadi warna x_6 yang bertetangga dengan x_{10}. Sehingga diperoleh:

$L_{10} = < 2,3,4,5,6,7,8,9,10 >$

g. **<u>Simpul x_7</u>**

Untuk warna simpul x_7, karena simpul x_7 sebelumnya bertetangga dengan simpul x_2 dan x_6, sedangkan warna untuk simpul x_2 adalah warna 1 dan warna untuk simpul x_6 adalah warna 2, maka yang menjadi warna pertama pada $L_7 =< 1,2,3,4,5,6,7 >$ adalah warna 3, berarti C_7 untuk simpul x_7 adalah 3, kemudian perhatikan simpul-simpul yang bertetangga dengan simpul x_7, simpul yang bertetangga dengan simpul x_7 adalah simpul x_8, x_9 dan x_{10}, berarti $j =$ 8,9 dan 10, kemudian untuk L_8, L_9 dan L_{10} atau warna yang mungkin bisa menjadi warna dari simpul x_8, x_9 dan x_{10} adalah sebagai berikut:

- $L_j \ = L_j - C_i$

  $L_8 = L_8 - L_7$

  $= < 1,2,3,4,5,6,7,8 > \ - < 3 >$, artinya adalah jika $C_7 = 3$ anggota $L_8 =$ $< 1,2,3,4,5,6,7,8 >$, buang $C_7 = 3$ dari $L_8 =< 1,2,3,4,5,6,7,8 >$, sebab x_8 tidak boleh diwarnai dengan warna $C_7 = 3$, karena $C_7 = 3$ telah menjadi warna x_7 yang bertetangga dengan x_8. Sehingga diperoleh:

  $L_8 =< 1,2,4,5,6,7,8 >$

- $L_j = L_j - C_i$

  $L_9 = L_9 - C_7$

  $= < 1,2,3,4,5,6,7,8,9 > \ - < 3 >$, artinya adalah jika $C_7 = 3$ anggota $L_9 =< 1,2,3,4,5,6,7,8,9 >$,buang $C_7 = 3$ dari $L_9 =<$ $1,2,3,4,5,6,7,8,9 >$, sebab x_9 tidak boleh diwarnai dengan warna $C_7 =$ 3, karena $C_7 = 3$ telah menjadi warna x_7 yang bertetangga dengan x_9. Sehingga diperoleh:

  $L_9 \ =< 1,2,4,5,6,7,8,9 >$

- $L_{10} = L_{10} - C_7$

$= < 1,2,3,4,5,6,7,8,9,10 > \; - < 3 >$, artinya adalah jika $C_7 = 3$ anggota $L_{10} =< 1,2,3,4,5,6,7,8,9 >$,buang $C_7 = 3$ dari $L_{10} =< 1,2,3,4,5,6,7,8,9 >$, sebab x_{10} tidak boleh diwarnai dengan warna $C_7 = 3$, karena $C_7 = 3$ telah menjadi warna x_7 yang bertetangga dengan x_{10}. Sehingga diperoleh:

$L_{10} = < 1,2,4,5,6,7,8,9,10 >$

h. Simpul x_8

Untuk warna simpul x_8, perhatikan $L_8 =< 1,2,3,4,5,6,7,8 >$, ambil warna 2, karena warna pertama pada L_8 telah dipakai oleh simpul tetangga dari simpul x_8 sebelumnya, yaitu simpul x_1, berarti C_8 untuk simpul x_8 adalah 2, kemudian perhatikan simpul-simpul yang bertetangga dengan simpul x_8, simpul yang bertetangga dengan simpul x_8 adalah simpul x_9 dan x_{10}, berarti $j = 9,10$, kemudian untuk L_9 dan L_{10} atau warna yang mungkin bisa menjadi warna dari simpul x_9 dan x_{10} adalah sebagai berikut :

- $L_j = L_j - C_i$

  $L_9 = L_9 - C_8$

  $= < 1,2,3,4,5,6,7,8,9 > \; - < 2 >$, artinya adalah jika $C_8 = 2$ anggota $L_9 = < 1,2,3,4,5,6,7,8,9 >$, buang $C_8 = 2$ dari $L_9 =< 1,2,3,4,5,6,7,8,9 >$ sebab x_9 tidak boleh diwarnai dengan warna $C_8 = 2$, karena $C_8 = 2$ telah menjadi warna x_8 yang bertetangga dengan x_9. Sehingga diperoleh:

  $L_9 \; =< 1,3,4,5,6,7,8,9 >$

- $L_j \; = L_j - C_i$

  $L_{10} = L_{10} - C_8$

  $= < 1,2,3,4,5,6,7,8,9,10 > \; - < 2 >$, artinya adalah jika $C_8 = 2$ anggota $L_{10} =< 1,2,3,4,5,6,7,8,9,10 >$, buang $C_8 = 2$ dari $L_{10} =< 1,2,3,4,5,6,7,8,9,10 >$ sebab x_9 tidak boleh diwarnai dengan warna $C_8 = 2$, karena $C_8 = 2$ telah menjadi warna x_8 yang bertetangga dengan x_{10}. Sehingga diperoleh:

  $L_{10} = < 1,3,4,5,6,7,8,9,10 >$

i. Simpul x_9

Untuk warna simpul x_9, ambil warna 1, karena warna pertama pada $L_9 =< 1,2,3,4,5,6,7,8,9 >$ adalah warna 1, berarti C_9 untuk simpul x_9 adalah 1, kemudian perhatikan simpul-simpul yang bertetangga dengan simpul x_9, simpul yang bertetangga dengan simpul x_9 adalah simpul x_{10}, berarti $j = 10$, kemudian untuk L_{10} atau warna yang mungkin bisa menjadi warna dari simpul x_{10} adalah sebagai berikut :

- $L_j \ = L_j - C_i$

  $L_{10} = L_{10} - C_9$

  $= < 1,2,3,4,5,6,7,8,9,10 > - < 1 >$, artinya adalah jika $C_9 = 1$ anggota $L_{10} = 1,2,3,4,5,6,7,8,9,10 >$,buang $C_9 = 1$ dari $L_{10} =<$ 1,2,3,4,5,6,7,8,

  9,10 >, sebab x_{10} tidak boleh diwarnai dengan warna $C_9 = 1$, karena $C_9 = 1$ telah menjadi warna x_9 yang bertetangga dengan x_{10}. Sehingga diperoleh:

  $L_{10} = < 2,3,4,5,6,7,8,9,10 >$

j. Simpul x_{10}

Untuk warna simpul x_{10}, perhatikan $L_{10} =< 1,2,3,4,5,6,7,8,9,10 >$, ambil warna 4, karena warna 1,2 dan 3 telah digunakan oleh simpul tetangga dari x_{10} sebelumnya, yaitu simpul x_7, x_8, dan x_9, berarti C_{10} untuk simpul x_{10} adalah 4. Kemudian perhatikan simpul-simpul yang bertetangga dengan simpul x_{10}. Simpul yang bertetangga dengan simpul x_{10} adalah simpul x_{11} dan x_{12}, berarti $j = 11,12$, kemudian untuk L_{11} dan L_{12} atau warna yang mungkin bisa menjadi warna dari simpul x_{11} dan x_{12} adalah sebagai berikut :

- $L_{11} = L_{11} - C_{10}$

  $= < 1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11 > \ - < 4 >$, artinya adalah jika $C_{10} = 4$ anggota $L_{11} =< 1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11 >$, buang $C_{10} = 4$ dari $L_{11} =< 1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11 >$, sebab x_{11} tidak boleh diwarnai dengan warna $C_{10} = 4$, karena $C_{10} = 4$ telah menjadi warna x_{10} yang bertetangga dengan x_{11}. Sehingga diperleh:

$L_{11} =< 1,2,3,5,6,7,8,9,10,11 >$.

- $L_{12} = L_{12} - C_{10}$

  $=< 1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12 > - < 4 >$, artinya adalah jika $C_{10} = 4$ anggota $L_{12} =< 1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12 >$, buang $C_{10} = 4$ dari $L_{12} =< 1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11 >$, sebab x_{12} tidak boleh diwarnai dengan warna $C_{10} = 4$, karena $C_{10} = 4$ telah menjadi warna x_{10} yang bertetangga dengan x_2. Sehingga diperleh:

  $L_{12} =< 1,2,3,5,6,7,8,9,10,11,12 >$

k. Simpul x_{11}

Untuk warna simpul x_{11} ambil warna 1, karena warna pertama pada $L_{11} =< 1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11 >$ adalah warna 1, berarti C_{11} untuk simpul x_{11} adalah 1, kemudian perhatikan simpul-simpul yang bertetangga dengan simpul x_{11}, simpul yang bertetangga dengan simpul x_{11} adalah simpul x_{12}, berarti $j = 12$. Kemudian untuk L_{12} atau warna yang mungkin bisa menjadi warna dari simpul x_{12} adalah sebagai berikut :

- $L_{12} = L_{12} - C_{11}$

  $=< 1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12 > - < 1 >$, artinya adalah jika $C_{11} = 1$ anggota $L_{12} =< 1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12 >$, buang $C_{11} = 1$ dari $L_{12} =< 1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12 >$, sebab x_{12} tidak boleh diwarnai dengan warna $C_{11} = 1$, karena $C_{11} = 1$ telah menjadi warna x_{11} yang bertetangga dengan x_{12}. Sehingga diperoleh:

  $L_{12} =< 2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12 >$

l. Simpul x_{12}

Untuk warna simpul x_{12}, perhatikan $L_{12} =< 1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12 >$, karena warna pertama pada L_{12} telah dipakai oleh simpul x_{11}, dan simpul x_{11} merupakan simpul tetangga dari x_{12} sebelumnya, maka ambil warna 2, berarti C_2

untuk simpul x_2 adalah 2. Kemudian perhatikan simpul-simpul yang bertetangga dengan simpul x_{12}. Simpul yang bertetangga dengan simpul x_{12} tidak ada.

Langkah 2 dan 3 dapat dilihat secara ringkas pada Tabel 4.1 berikut ini:

Tabel 4.1 Langkah-Langkah Pewarnaan Graf

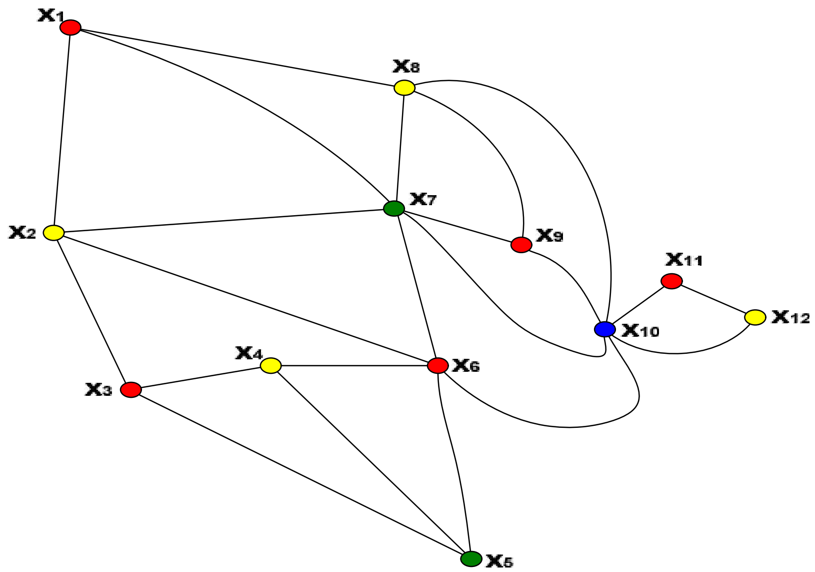
Langkah	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
2	1	<1>			
2	2	<1,2>			
2	3	<1,2,3>			
2	4	<1,2,3,4>			
2	5	<1,2,3,4,5>			
2	6	<1,2,3,4,5,6>			
2	7	<1,2,3,4,5,6,7>			
2	8	<1,2,3,4,5,6,7,8>			
2	9	<1,2,3,4,5,6,7,8,9>			
2	10	<1,2,3,4,5,6,7,8,9,10>			
2	11	<1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11>			
2	12	<1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12>			
3.1	1		1		
3.2	1			2	<2>
				7	<1,2,3,4,5,6,7>
				8	<1,2,3,4,5,6,7,8>
3.1	2		2		
3.2	2			3	<1,3>
				6	<1,3,4,5,6>
				7	<1,3,4,5,6,7>
3.1	3		1		
3.2	3			4	<2,3,4>
				5	<2,3,4,5>
3.1	4		2		
3.2	4			5	<1,3,4,5>
				6	<1,3,4,5,6>
3.1	5		3		
3.2	5			6	<1,2,4,5,6>
3.1	6		1		
3.2	6			7	<1,2,3,5,6,7>
				10	<1,2,3,5,6,7,8,9,10>
3.1	7		3		

3.2	7			8	$\langle 1,2,4,5,6,7,8 \rangle$
				9	$\langle 1,2,4,5,6,7,8,9 \rangle$
				10	$\langle 1,2,4,5,6,7,8,9,10 \rangle$
3.1	8		2		
3.2	8			9	$\langle 1,3,4,5,6,7,8,9 \rangle$
				10	$\langle 1,3,45,6,7,8,9,10 \rangle$
3.1	9		1		
3.2	9			10	$\langle 2,3,4,5,6,7,8,9,10 \rangle$
3.1	10		4		
3.2	10			11	$\langle 1,2,4,5,6,7,8,9,10,11 \rangle$
				12	$\langle 1,2,4,5,6,7,8,9,10,11,12 \rangle$
3.1	11		1		
3.2	11			12	$\langle 2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12 \rangle$
3.1	12		2		

Berdasarkan kolom C_i pada Tabel 4.1 di atas, jumlah warna yang diperoleh dari hasil pewarnaan dengan menggunakan algoritma *Sequential Color* adalah empat warna sebagai berikut :

1. Simpul x_1 diwarnai oleh warna 1
2. Simpul x_2 diwarnai oleh warna 2
3. Simpul x_3 diwarnai oleh warna 1
4. Simpul x_4 diwarnai oleh warna 2
5. Simpul x_5 diwarnai oleh warna 3
6. Simpul x_6 diwarnai oleh warna 1
7. Simpul x_7 diwarnai oleh warna 3
8. Simpul x_8 diwarnai oleh warna 2
9. Simpul x_9 diwarnai oleh warna 1
10. Simpul x_{10} diwarnai oleh warna 4
11. Simpul x_{11} diwarnai oleh warna 1
12. Simpul x_{12} diwarnai oleh warna 2.

Jika dimisalkan warna 1 adalah warna merah, warna 2 adalah warna kuning, warna 3 adalah warna hijau, warna 4 adalah warna biru. Adapun graf yang telah diwarnai adalah sebagai berikut:



Gambar 4.6 Graf yang Telah Diwarnai

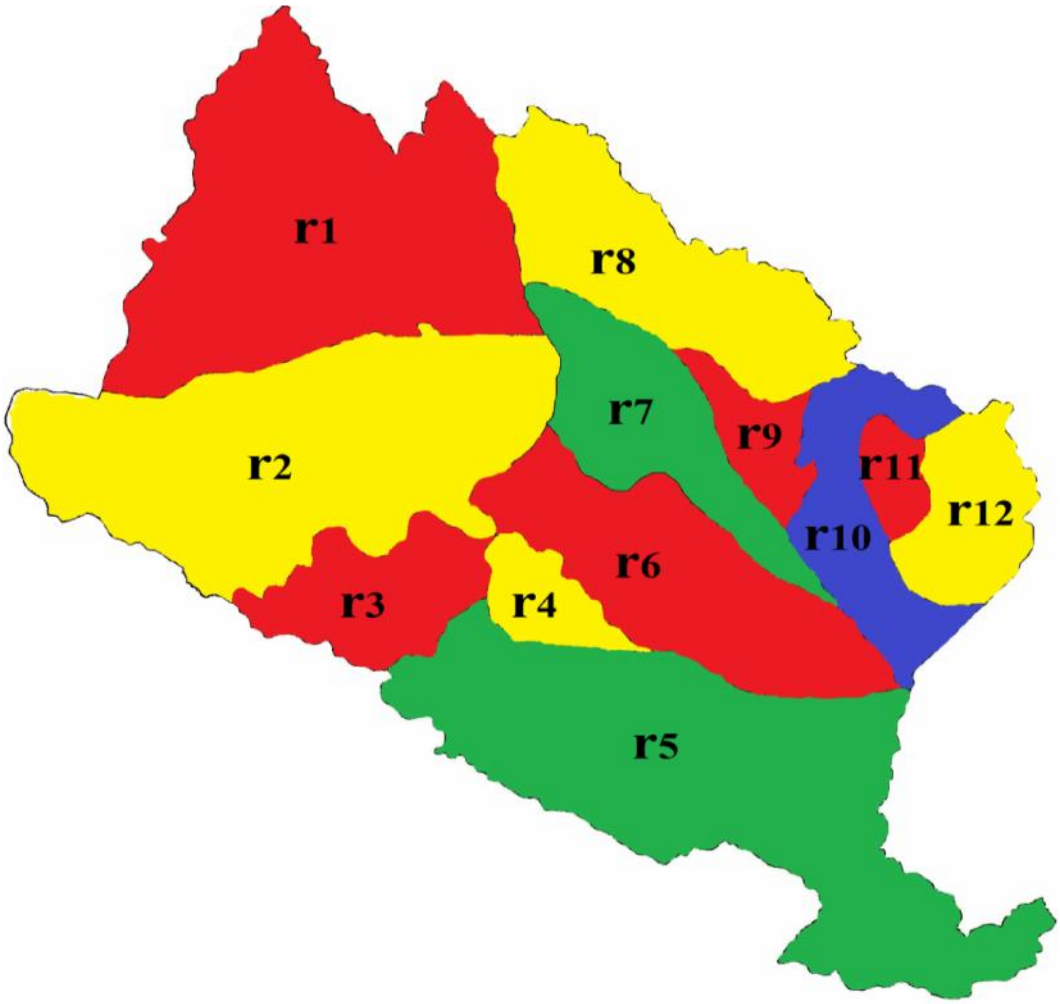
Gambar 4.6 merupakan hasil dari proses pewarnaan dengan menggunakan algoritma *Sequential Color*. Dapat dilihat pada graf tersebut, hasil pewarnaan dengan menggunakan algoritma *Sequential Color* sesuai dengan konsep pewarnaan graf, yaitu setiap simpul yang bertetangga tidak boleh diwarnai dengan warna yang sama dan tujuan pewarnaan dengan menggunakan algoritma *Sequential Color* tercapai, yaitu menginginkan warna yang sesedikit mungkin dalam proses pewarnaannya.

4.5 Menentukan Jumlah Warna Minimum Peta Kabupaten Kuantan Singingi

Jumlah warna minimum atau disebut dengan bilangan kromatik $\chi(G)$ yang diperoleh dari hasil pewarnaan wilayah Kecamatan peta Kabupaten Kuantan Singingi dengan menggunakan algoritma *Sequential Color* dapat dilihat dari berapa banyak warna yang dibutuhkan dalam pewarnaan graf tersebut. Sesuai dengan konsep pewarnaan wilayah, simpul-simpul pada graf dual dari graf yang merepresentasikan peta Kabupaten Kuantan Singingi mewakili wilayah Kecamatan yang ada, sehingga warna yang digunakan untuk suatu simpul berarti warna yang dapat digunakan untuk pewarnaan wilayah yang diwakilinya.

Berdasarkan hasil yang diperoleh dari pewarnaan simpul dari graf dual peta Kabupaten Kuantan Singingi dengan menggunakan algoritma *Sequential Color,* warna minimum yang didapatkan adalah 4 warna, sehingga warna yang dibutuhkan untuk mewarnai 12 wilayah Kecamatan di Kabupaten Kuantan Singingi hanya membutuhkan 4 warna ($\chi(G) = 4$) dalam proses pewarnaannya.

Gambar 4.7 di bawah ini adalah peta wilayah Kabupaten Kuantan Singingi yang telah diwarnai Kecamatan-Kecamatannya, dapat dilihat bahwa warna yang menjadi warna wilayah Kecamatan yang ada merupakan warna simpul pada graf dual sebelumnya, karena sesuai dengan konsep pewarnaan wilayah (*region coloring*) setiap warna yang menjadi warna dari wilayah Kecamatan pada peta diwakili oleh warna simpul pada graf dual yang mewakili setiap Kecamatan.



Gambar 4.7 Pewarnaan Peta Wilayah Kabupaten Kuantan Singingi

Berdasarkan Gambar 4.7, dapat diketahui batas-batas setiap wilayah Kecamatan di Kabupaten Kuantan Singingi sebagai berikut :

1. Kec. r_1 : Singingi Hilir berbatasan dengan r_2 : Singingi, r_7: Benai dan r_8 : Kecamatan Logas Tanah Darat.
2. Kec. r_2 : Singingi berbatasan dengan r_1 : Singingi Hilir, r_3 : Hulu Kuantan, r_6: Kuantan Tengah dan r_7 : Kecamatan Benai..
3. Kec. r_3 : Hulu Kuantan berbatasan dengan r_2 : Singingi, r_4: Gunung Toar, r_5 : Kuantan Mudik.
4. Kec. r_4: Gunung Toar berbatasan dengan r_3 : Hulu Kuantan, r_5 : Kuantan Mudik dan r_6: Kecamatan Kuantan Tengah.
5. Kec. r_5 : Kuantan Mudik berbatasan dengan r_3: Hulu Kuantan, r_4: Gunung Toar , dan r_6 : Kecamatan Kuantan Tengah.
6. Kec. r_6: Kuantan Tengah berbatasan dengan r_2 : Singingi, r_4 : Gunung Toar, r_5 : Kuantan Mudik, r_7 : Benai dan r_{10}: Kecamatan Kuantan Hilir.
7. Kec. r_7 : Benai berbatasan dengan r_1 : Singingi Hilir, r_2: Singingi, r_6 : Kuantan Tengah, r_8: Logas Tanah Darat, r_9: Pangean, dan r_{10}: Kecamatan Kuantan Hilir.
8. Kec. r_8 : Logas Tanah Darat berbatasan dengan r_1: Singingi Hilir, r_7 : Benai, r_9: Pangean dan r_{10} : Kecamatan Kuantan Hilir.
9. Kec. r_9: Pangean berbatasan dengan r_7 : Benai, r_8 : Logas Tanah Darat dan r_{10} : Kecamatan Kuantan Hilir.
10. Kec. r_{10} : Kecamatan Kuantan Hilir berbatasan dengan r_6: Kuantan Tengah, r_7 : Benai, r_8: Logas Tanah Darat, r_9 : Pangean, r_{11}: Inuman dan r_{12}: Kecamatan Cerenti.
11. Kec. r_{11} : Kecamatan Inuman berbatasan dengan r_{10} : Kuantan Hilir dan r_{12}: Kecamatan Cerenti.
12. Kec. r_{12} : Kecamatan Cerenti berbatasan dengan r_{10}: Kuantan Hilir dan r_{11}: Kecamatan Inuman.

Berdasarkan Gambar 4.7 di atas, dapat diketahui bahwa untuk mendapatkan hasil pewarnaan dengan warna yang sesedikit mungkin, setiap

Kecamatan dapat dibentuk ke dalam kelompok-kelompok sebagai berikut:

1. r_1 : Kecamatan Singingi Hilir, r_3 : Kecamatan Hulu Kuantan, r_6 : Kecamatan Kuantan Tengah, r_9 : Kecamatan Pangean, r_{11}: Kecamatan Inuman.
2. r_2 : Kecamatan Singingi, r_4 : Kecamatan Gunung Toar, r_8 : Kecamatan Logas Tanah Darat, dan r_{12} : Kecamatan Cerenti.
3. r_5 : Kecamatan Kuantan Mudik r_7 : Kecamatan Benai.
4. r_{10} : Kecamatan Kuantan Hilir.

Setiap kelompok di atas harus diberi warna yang berbeda dan setiap anggota yang tergabung dalam satu kelompok harus diberi warna yang sama dengan warna kelompoknya. Pewarnaan pada peta Kabupaten Kuantan Singingi didapatkan bilangan kromatiknya adalah 4 $(\chi(G) = 4)$ karena hanya memerlukan empat warna dalam proses pewarnaannya.

BAB V

PENUTUP

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil pembahasan pada Bab IV maka dapat diambil kesimpulan sebagai berikut :

1. Pewarnaan wilayah pada peta Kabupaten Kuantan Singingi dapat dilakukan menggunakan algoritma *Sequential Color* dengan cara membuat graf dualnya terlebih dahulu. Graf dual dari Kabupaten Kuantan Singingi terdiri dari 12 simpul dan 21 sisi.
2. Jumlah warna minimum atau bilangan kromatik $(\chi(G))$ yang didapatkan dari hasil pewarnaan wilayah Kecamatan pada peta Kabupaten Kuantan Singingi pada penelitian ini diperoleh 4 warna $(\chi(G) = 4)$, dengan warna antar wilayah yang bertetangga memiliki warna berbeda.

5.2 Saran

Tugas akhir ini membahas salah satu aplikasi dalam bidang teori graf tetang pewarnaan graf yang diaplikasikan pada pewarnaan wilayah pada peta menggunakan algoritma *Sequential Color*. Penelitian lain yang dapat dikembangkan dari tugas akhir ini adalah pewarnaan graf bisa juga dilakukan pada kasus pengaturan lampu lalu lintas menggunakan algoritma lain serta pewarnaan dapat dilakukan dengan menggunakan program komputer.

DAFTAR PUSTAKA

As'ad, Nabila. "Aplikasi Pewarnaan Graf pada Pemecahan Masalah Penyusunan Jadwal", Makalah Strategi Algoritmatik ITB. Bandung. 2008.

Heleni, Susda dan Zulkarnain. *Matematika Diskrit*, Pusat Pengembangan Pendidikan Universitas Riau, Pekanbaru. 2006.

Http://www.kuansing.go.id. *Peta Kabupaten Kuantan Singingi*. Diakses 10 Oktober 2011.

Lieyanda, Vivi. "Pemanfaatan Algoritma Sequential Search dalam Pewarnaan Graf untuk Alokasi Memori Komputer", Makalah II2092 Probabilitas dan Statistik-sem. I Tahun 2010/2011.

Lipschuts, Seymour, dan Larslipson Marc. *Matematika Diskrit Jilid 2 Schaum's*. Salemba Teknika, Jakarta. 2002.

Munir, Rinaldi. *Matematika Diskrit*. Edisi Ketiga. Informatika, Bandung, Indonesia. 2005.

Siang, Jong Jek, M. Sc. *Matematika Diskrit dan Aplikasinya pada Ilmu Komputer*. Penerbit Andi, Yogyakarta. 2006.

Wibisono, Samuel. *Matematika Diskrit*. Graha Ilmu, Jakarta. 2004.

Wilson, Robin J. *Introduction to Graph Theory*. Fourth Edition. British Library, London. 1995.